

III кръг, 28 април 2012 г., Ямбол

Ученици от 7-8 клас - решения

1 задача. Планетни системи.

А. Планети около Бялото слънце. В периодите на най-благоприятна видимост жителите на Виолетовата планета виждат Зелената планета на максимално отстояние 45° източно или западно от Бялото слънце. А Оранжевата планета се наблюдава на 30° максимално отстояние източно или западно от Бялото слънце. За жителите на Виолетовата планета в годината има 300 денонощия.

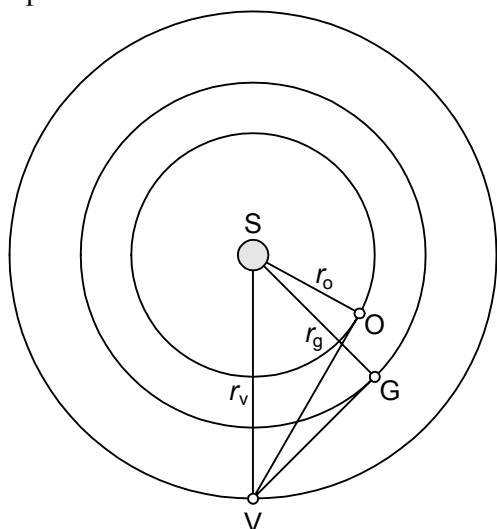
- Нарисувайте схема на планетната система.
- Намерете орбиталните периоди на Зелената и Оранжевата планета. Резултатите изразете в денонощия за Виолетовата планета.
- През какви интервали от време се повтарят периодите на най-благоприятна видимост на Зелената и Виолетовата планета за жителите на Оранжевата планета?

Б. Планети около Жаркото слънце. За обитателите на Топлата планета в годината има 30 денонощия, а за обитателите на Прохладната планета в годината има 120 денонощия. Годишната за Прохладната планета се равнява на 4 години за Топлата планета. Двете планети се въртят около осите си и обикалят около Жаркото слънце в една и съща посока.

- Коя от двете планети се върти по-бързо около оста си? Подкрепете вашия отговор с количествени пресмятания.

Решение:

А. Щом като не се наблюдават на големи ъгли отстояния от Бялото слънце, Оранжевата и Зелената планета са вътрешни за Виолетовата планета.



Най-благоприятните периоди на видимост на една вътрешна планета са около моментите на максимална елонгация – максимално видимо отдалечаване от Слънцето. Да означим с S Бялото слънце, с O Оранжевата планета, с G Зелената и с V Виолетовата планета. Оранжевата и Зелената планета са в максимална елонгация за наблюдателите от Виолетовата планета. Това означава, че ъглите VOS и VGS са прави. Да означим с r_o , r_g и r_v радиусите на орбитите съответно на Оранжевата, Зелената и Виолетовата планета. В правоъгълния триъгълник VOS ъгълът SVO е равен на 30° . Следователно:

$$r_o = r_v / 2$$

В правоъгълния триъгълник VGS ъгълът SVG е равен на 45° . Следователно:

$$VG = SG = r_g$$

Като използваме Питагоровата теорема, намираме:

$$r_v^2 = 2r_g^2$$

$$r_g = r_v / \sqrt{2}$$

Да означим орбиталните периоди на планетите съответно с T_o , T_g и T_v . За да намерим тези периоди, използваме III закон на Кеплер:

$$\frac{r_o^3}{T_o^2} = \frac{r_g^3}{T_g^2} = \frac{r_v^3}{T_v^2}$$

Оттук последователно намираме периодите на Оранжевата и Зелената планета, изразени в денонощия на Виолетовата планета:

$$T_o = T_v \sqrt{\frac{r_o^3}{r_v^3}} = \frac{T_v}{\sqrt{2^3}} \approx 106 \text{ дни}$$

$$T_g = T_v \sqrt{\frac{r_g^3}{r_v^3}} = \frac{T_v}{\sqrt{(\sqrt{2})^3}} \approx 178 \text{ дни}$$

За жителите на Оранжевата планета останалите две планети – Зелената и Виолетовата – са външни. Периодите на най-благоприятна видимост на тези планети от Оранжевата планета са, когато те са в противоположене. Интервалите от време, през които се повтарят моментите на опозиция, са равни на синодичните периоди на двете планети по отношение на Оранжевата планета. Да означим тези синодични периоди съответно с T_{og} и T_{ov} . За тях можем да напишем:

$$\frac{1}{T_{og}} = \frac{1}{T_o} - \frac{1}{T_g}$$

$$T_{og} = \frac{T_o T_g}{T_g - T_o} \approx 262 \text{ дни}$$

$$\frac{1}{T_{ov}} = \frac{1}{T_o} - \frac{1}{T_v}$$

$$T_{ov} = \frac{T_o T_v}{T_v - T_o} \approx 164 \text{ дни}$$

Б. Годианата на Прохладната планета е 4 пъти по-дълга от годината на Топлата планета. В годината на Прохладната планета има 4 пъти повече дни, отколкото в годината на Топлата планета. Това означава, че денонощията за жителите на Топлата планета и на Прохладната планета са с еднаква продължителност. Не би ли трябвало да заключим, че двете планети се въртят еднакво бързо около своите оси? Тук, обаче, става дума за продължителността на слънчевите денонощия – те имат значение в живота на обитателите на планетите. Но слънчевото денонощие е периодът между две едноименни кулминации на Жаркото слънце – между два последователни момента, когато е пладне например. А “истинският” период на въртене на планетата е периодът ѝ на въртене относно звездите – звездното денонощие. Всяка от планетите се върти около оста си в същата посока, в която обикаля около своето слънце, Ако за една година планетата се завърта около оста си N пъти относно слънцето, то относно звездите тя прави точно с едно завъртане повече, или $N + 1$. Да отбележим с T_w и T_c слънчевите денонощия съответно на Топлата и на Прохладната планета, а T_w^* и T_c^* – звездните денонощия. В сила са следните съотношения:

$$T_w^* = \frac{30}{31} T_w \approx 0.97 T_w$$

$$T_c^* = \frac{120}{121} T_c \approx 0.99 T_c$$

Понеже $T_w = T_c$, можем да заключим, че периодът на оклоосно въртене на Топлата планета е по-кратък и следователно тя се върти около оста си по-бързо, отколкото Прохладната планета.

До същия резултат можем да достигнем и ако използваме познатите ни формули за връзката между звездното и слънчевото денонощие:

$$\frac{1}{T_w} = \frac{1}{T_w^*} - \frac{1}{P_w} \qquad \frac{1}{T_c} = \frac{1}{T_c^*} - \frac{1}{P_c},$$

където $P_w = 30$ дни и $P_c = 120$ дни са орбиталните периоди на двете планети.

Критерии за оценяване (общо 18 т.):

Подусловие А (13 т.)

За правилно построяване на схемата – 2 т.

За определяне на орбиталните радиуси на Оранжевата и Зелената планета – 2 т.

За правилен математически метод на определяне на орбиталните периоди на двете планети – 2 т.

За верни числени отговори за периодите – 2 т.

За правилно посочване кога са най-благоприятните периоди видимост на външните планети за жителите на Оранжевата планета – 1 т.

За правилен начин на определяне на синодичните периоди – 2 т.

За верни числени отговори – 2 т.

Подусловие Б (5 т.)

За правилни теоретични съображения и математически подход – 2 т.

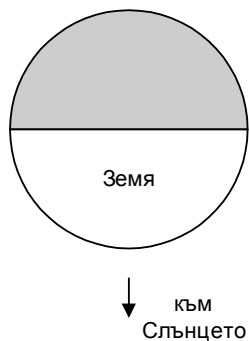
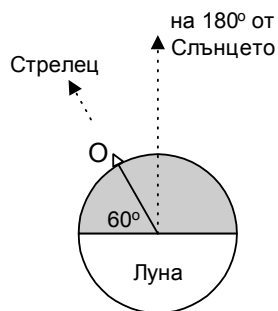
За верни числени отговори – 2 т.

За правилно заключение коя планета се върти по-бързо – 1 т.

2 задача. Носталгия по Земята. От дълго време вие живеете и работите в един от бъдещите лунни градове, но така и не можете да свикнете с дългите лунни нощи. Настроението ви е лошо, защото остават още около 5 земни денонощия до изгрева на Слънцето. Носталгията ви по Земята е още по-силна, тъй като Земята не се вижда над хоризонта. В зенита грее съзвездие Стрелец. Свързвате се чрез LunarNet с ваш приятел от друг лунен град и той ви казва, че в момента наблюдава пълно слънчево затъмнение. А вие си мислите какъв ли сезон е сега в родната ви България?

- Нарисувайте подходяща схема и отговорете на този въпрос, като дадете необходимата обосновка.

Решение:



Слънчевото денонощие на Луната е равно на периода на смяна на лунните фази, или синодичния лунен месец, който трае около 29.5 земни денонощия. Следователно оставащите 5 земни денонощия до изгрева на Слънцето за вас са приблизително една трета част от лунната нощ.

Да отбележим с точка О вашето местоположение на Луната. Луната трябва да се завърти около оста си още приблизително на 60° , спрямо Слънцето, за да настъпи новият ден за вас.

Слънчево затъмнение на Луната се наблюдава, когато Луната навлезе в сянката на Земята. Това може да стане, само когато Луната за земните наблюдатели е в пълнолуние (и тогава те ще наблюдават лунно затъмнение). Вашият лунен град е на обратната страна на Луната, която не се вижда от Земята. Затова Земята не се появява над вашия хоризонт.

От схемата се вижда, че Слънцето е на $60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$ източно от съзвездието Стрелец. Слънцето трябва да е приблизително в петото след Стрелец зодиакално съзвездие, или съзвездието Бик. Слънцето се намира в зодиакалния знак Бик през май. Но както знаем, поради прецесията на земната ос, зодиакалните знаци са отместени спрямо съзвездиата и сега Слънцето е в съзвездието Бик през юни. Следователно сезонът на Земята е началото на лятото.

Критерии за оценяване (общо 10 т.):

За правилно определяне каква част от лунната нощ са 5 земни денонощия – 2 т.

За правилно определяне на положението на наблюдателя относно границите на нощната страна на Луната – 2 т.

За правилно обяснение и определяне на положението на Земята и посоката към Слънцето предвид факта на затъмнението – 2 т.

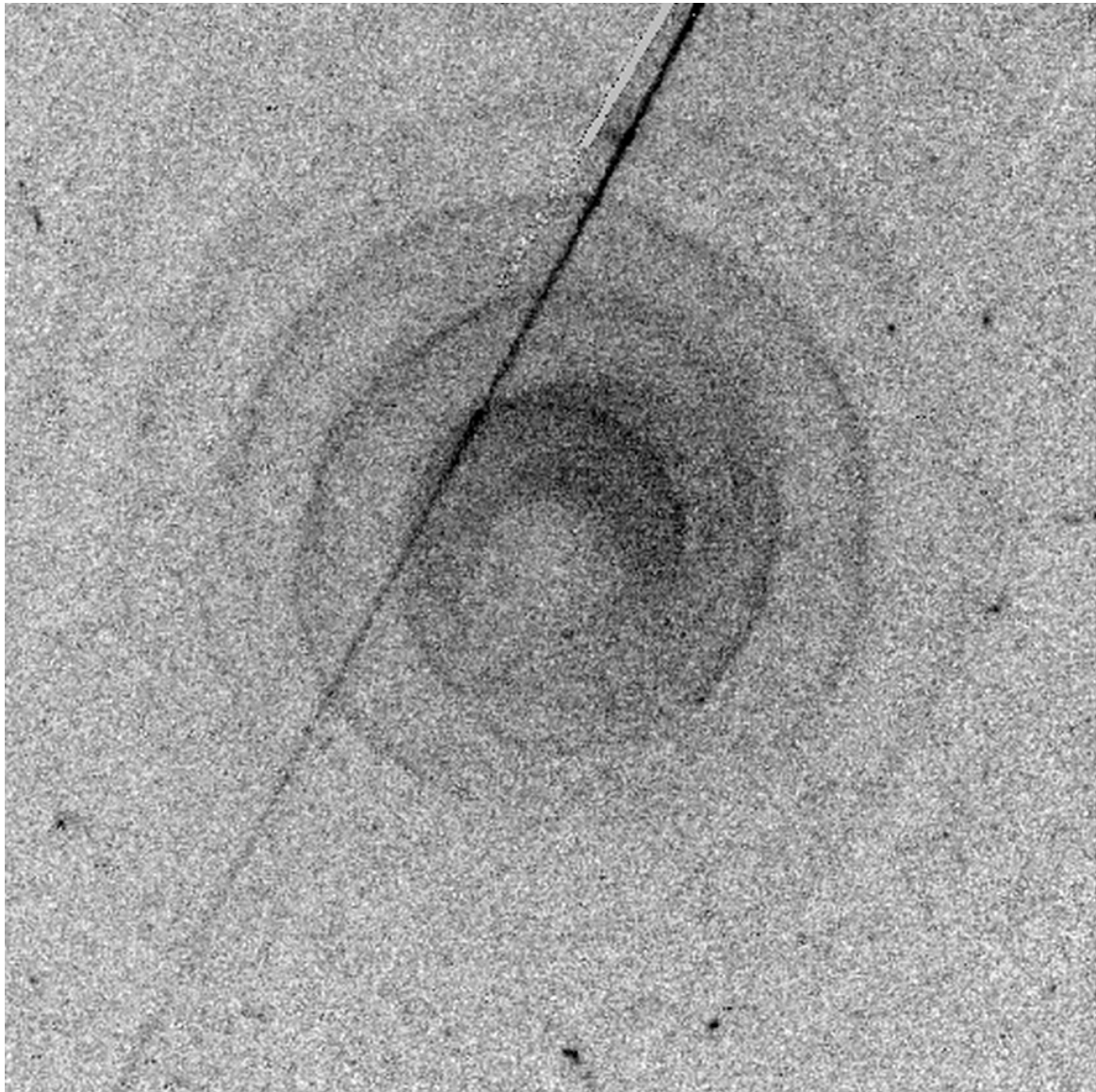
За правилни разсъждения относно положението на Слънцето на фона на звездите и сезона от годината – 3 т.

За правилно заключение за сезона – 1 т.

3 задача. Странната мъглявина. Преди няколко години космическият телескоп Хъбъл засне в инфрачервени лъчи много странна мъглявина. Тя е почти правилна спирала и засенчва изцяло звездата, която се намира в центъра на мъглявината. С допълнителни наблюдения е установено, че звездата в мъглявината е двойна. Една от звездите има излишък от въглерод – въглеродна звезда. Вероятно тя е червен гигант и губи вещество, което е богато на въглерод и образува тази странна мъглявина около звездите. Формата на мъглявината е спирална защото звездите се въртят около общ център на масите, като правят един оборот приблизително за 800 години. Ако двойната звездна система се намира на разстояние 1000 парсека от Земята, то с каква скорост изтича веществото от нея? Цялото негативно изображение, в центъра на което е мъглявината, е квадрат със страна 25.6 дъгови секунди.

Не обръщайте внимание на черната и бялата ивици, пресичащи изображението. Това са ефекти от близко разположена ярка звезда и артефакти от обработката на изображението и нямат отношение към решаването на задачата.

Разстоянието от Земята до Слънцето е 150×10^6 км.



Решение:

Измерваме страната на квадратното изображение, която се оказва 132.5 мм. Оттук получаваме мащаба на изображението в дъгови секунди. На 132.5 мм отговарят 25.6". Следователно на 1 мм ще отговарят $25.6 / 132.5 \approx 0.193''$. От двойната звездна система, закрита от плътната мъглявина в центъра на изображението изтича вещество във вид на струя с търсената скорост v . Поради въртенето на компонентите около техния център на масите, "челото" на изтичащата струя описва спирала, но самото вещество се движи радиално. Поставяме линията по някой от "радиусите" на спиралната структура и

измерваме разстоянията между двойки съседни дъги от спиралата. Това са разстояния, които изхвърленото вещество изминава за един орбитален период на двойната звезда, или 800 години. Повтаряме измерването по няколко подходящо избрани радиуса в различни направления от центъра на мъглявината и усредняваме резултатите. Получаваме 12.5 мм. Използвайки определения от нас мащаб, намираме:

$$12.5 \text{ мм съответстват на } 12.5 \times 0.193 \approx 2.413''$$

Разстоянието до мъглявината е 1000 парсека. По определение от разстояние 1 парсек разстоянието Земя-Слънце (1 астрономическа единица) се вижда под ъгъл 1". Това означава, че ако една отсечка, дълга 1 астрономическа единица, е отдалечена от нас на 1000 парсека, нейната видима ъглова дължина за нас ще бъде 1000 пъти по-малка, или 0.001". За да виждаме на такова разстояние една отсечка под ъгъл 1", тя трябва да е дълга 1000 астрономически единици. Следователно средното разстояние между две съседни дъги от спиралната мъглявина ще бъде:

$$2.413'' \times 1000 = 2413 \text{ астрономически единици} \times 150 \times 10^6 \text{ км} \approx 3.62 \times 10^{11} \text{ км}$$

Това разстояние се изминава от изхвърленото от звездната система вещество за 800 години. Оттук за скоростта на веществото получаваме:

$$v = 3.62 \times 10^{11} \text{ км} / (800 \text{ години} \times 365 \text{ дни} \times 24 \text{ ч.} \times 60 \text{ м.} \times 60 \text{ с.}) \approx 14.3 \text{ км/с.}$$

Критерии за оценяване (общо 12 т.):

За определяне на мащаба на изображението – 2 т.

За правилна обосновка на метода на определяне на скоростта на изтичане – 3 т.

За определяне на средното разстояние между съседни дъги от спиралата – 2 т.

За правилен начин на пресмятане на разстоянието в километри – 3 т.

За правилен начин на пресмятане на скоростта в км/с – 1 т.

За верен числен отговор – 1 т.

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНА КОМИСИЯ ЗА ОРГАНИЗИРАНЕ НА ОЛИМПИАДАТА ПО АСТРОНОМИЯ

XV НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

<http://astro-olymp.org>

III кръг, 29 април 2012 г., Ямбол

Ученици от 7-8 клас - решение

Практическа задача. Слънчево затъмнение. Разполагате със снимка на слънчевото затъмнение от 11 август 1999 г., получена чрез точно наслагване на кадри от различни моменти на затъмнението, когато Слънцето е имало различни положения в небето. Снимката представлява негативно изображение.

• Направете необходимите измервания и пресмятания и определете приблизително продължителността на слънчевото затъмнение. Приемете, че видимият ъглов диаметър на Слънцето е 0.5° . Опишете и обяснете вашия метод на работа.

Решение:

Измерваме диаметъра на няколко изображения на Слънцето и получаваме около 2.5 мм. Това съответства на видимия ъглов размер на Слънцето, или 0.5° . Оттук определяме мащаба на снимката. На 1 мм отговаря ъглова мярка $0.5 / 2.5 = 0.2^\circ$. Като разгледаме внимателно последователните изображения на Слънцето заключаваме, че затъмнението е започнало някъде около момента, когато е било заснето второто поред отляво надясно изображение, и е завършило около момента, когато е било заснето последното дванайсето изображение, намиращо се до десния край на снимката. Разстоянието между центровете на тези две изображения е 178 мм. Като използваме мащаба, намираме това разстояние в градуси:

$$178 \text{ мм} \times 0.2^\circ = 35.6^\circ$$

Различните положения на Слънцето в различните моменти от затъмнението се дължат на видимото денонощно движение на Слънцето по небето. Едно цяло завъртане Слънцето прави за едно слънчево денонощие, или 24 часа. Времетраенето на затъмнението Δt определяме чрез пропорция:

$$\begin{array}{rcl} 24 \text{ ч.} & - & 360^\circ \\ \Delta t & - & 35.6^\circ \end{array}$$

$$\Delta t = 24 \cdot \frac{35.6}{360} \approx 2.4 \text{ ч.} \approx 2 \text{ ч. } 20 \text{ м.}$$

Необходимо е да се отбележи, че този начин на пресмятане е напълно коректен само когато Слънцето има деклинация нула, т.е. когато лежи върху небесния екватор. Само тогава то описва при денонощното си движение по небето голям кръг и ъгловият диаметър на Слънцето съответства на 0.5° по този кръг. Когато деклинацията на Слънцето е различна от нула, то описва за 24 часа по-малък кръг по небесната сфера и видимата му ъглова скорост е по-малка. Тъй като датата на затъмнението е 11 август, което е далеч от датите на равнодествията, то деклинацията на Слънцето тогава трябва да е била доста различна от нула. Следователно в метода на определяне трябва

да се въведе корекция. Но в задачата не се дава деклинацията на Слънцето, а и при това изображение нашите измервания не биха могли да са много точни, така че можем да пренебрегнем този фактор.

Критерии за оценяване (общо 12 т.):

За правилен подход при определяне на мащаба на снимката – 1 т.

За определяне на средния размер на изображението на Слънцето – 1 т.

За правилно числено пресмятане на мащаба – 1 т.

За разсъждения и обяснения върху метода на определяне продължителността на затъмненето – 4 т.

За правилни измервания – 1 т.

За правилни пресмятания – 3 т.

За верен числен отговор – 1 т.

